

KOMBINATORIKA

Upoznajmo se najpre sa nekim oznakama:

$n!$ - čita se "en faktorijel" a označava sledeći proizvod:

$$n! = n \circ (n-1) \circ (n-2) \circ \dots \circ 3 \circ 2 \circ 1$$

Primer:

$$5! = 5 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1 = 120 \quad \text{ili} \quad 7! = 7 \circ 6 \circ 5 \circ 4 \circ 3 \circ 2 \circ 1 = 5040$$

Po definiciji je $0! = 1$

U zadacima često koristimo trik da faktorijel rastavimo kao proizvod nekoliko članova i novog faktorijela.

$$\begin{aligned} \text{Tako je recimo:} \quad (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1) \circ \dots \circ 2 \circ 1 \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n! \quad \text{ili} \\ (n+2)! &= (n+2)(n+1)n(n-1)! \quad \text{itd.} \end{aligned}$$

Primer 1.

$$\text{Skrati razlomak:} \quad \frac{(n-1)!}{(n-3)!}$$

$$\text{Rešenje:} \quad \frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = (n-1)(n-2)$$

Primer 2.

Reši jednačinu : $\frac{(2x)!}{(2x-3)!} = \frac{20x!}{(x-2)!}$

Rešenje: $\frac{(2x)!}{(2x-3)!} = \frac{20x!}{(x-2)!}$

$$\frac{(2x)(2x-1)(2x-2)(2x-3)!}{(2x-3)!} = \frac{20x(x-1)(x-2)!}{(x-2)!}$$

$$\frac{(2x)(2x-1)(2x-2)\cancel{(2x-3)!}}{\cancel{(2x-3)!}} = \frac{20x(x-1)\cancel{(x-2)!}}{\cancel{(x-2)!}}$$

$$(2x)(2x-1)(2x-2) = 20x(x-1)$$

$$2x(2x-1)2(x-1) = 20x(x-1) \quad [\text{skratimo sa } 4x(x-1)]$$

$$2x-1 = 5 \quad \text{a odavde je } x=3$$

PRINCIPI PREBROJAVANJA

- Predmet *kombinatorike* je raspoređivanje elemenata u konačnim skupovima i određivanje broja takvih rasporeda.
- Proučavanje ove oblasti počelo je u 17. veku, uporedo sa nastankom teorije verovatnoće, kada su se prva pitanja pojavila u vezi sa igrama na sreću.
- Prebrojavanja predstavljaju važan deo kombinatorike. Različite skupove moramo prebrojavati u cilju rešavanja najrazličitijih problema. Nekada su to problemi određivanja trocifrenih brojeva formiranih od zadatih cifara, ili broj različitih telefonskih brojeva, do određivanja složenosti algoritama ili utvrđivanja verovatnoća slučajnih događaja.

Primer :

Dat je skup $\{1,2,3\}$. Koliko ima trocifrenih brojeva koji počinju cifrom 2, a da se cifre ne ponavljaju?

Rješenje: Sa zadatim ciframa možemo da formiramo samo 2 broja koji počinju cifrom 2, a to su 213 i 231.

Prebrojavanja da se vrše u konačnim ili prebrojivim skupovima i zato su ona predmet proučavanja **diskretne matematike**.

Razlikujemo tri vrste različitih rasporeda i to su:

- *permutacije,*
- *varijacije,*
- *kombinacije.*

VARIJACIJE BEZ PONAVLJANJA ELEMENATA

Neka je dat skup

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Varijacija k klase od n elemenata je bilo koja k -torka različitih elemenata skupa A .

Broj varijacija iznosi

$$V_k^n = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

Varijacije bez ponavljanja elemenata se mogu definisati i kao broj svih *injektivnih preslikavanja* (1-1 preslikavanja) skupa A od n elemenata u skup B od k elemenata.

Primer 1:

Dat je skup

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

Koliko ima varijacija druge klase elemenata ovoga skupa i kako glase?

Rešenje:

Ima ih šest.

$$V_2^3 = 3 \cdot 2 = 6$$

To su:

$$a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_2a_1 \quad a_2a_3 \quad a_3a_1 \quad a_3a_2$$

Primer 2:

Na konkurs u firmu javilo se 6 kandidata za radna mjesta direktora, sekretara i potrira. Na koliko načina ih je moguće izabrati?

Vršimo izbor 3 od 6 kandidata. Kako je raspored (funkcija) bitan, u pitanju su varijacije treće klase od 6 elemenata.

$$V_3^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

VARIJACIJE SA PONAVLJANJEM

Neka je dat skup

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Varijacija sa ponavljanjem k klase od n elemenata je bilo koja k -torka elemenata skupa A .

Broj varijacija iznosi

$$\bar{V}_k^n = n^k$$

Varijacije sa ponavljanjem elemenata se mogu definisati i kao broj ***svih preslikavanja*** skupa A od $n \geq 1$ elemenata, u skup B od $k \geq 0$ elemenata.

Primer 3:

Koliko ima dvocifrenih brojeva koji se mogu napisati sa ciframa 1,2,3 i kako glase?

Ima ih

$$\bar{V}_2^3 = 3^2 = 9$$

To su:

11,12,13,21,22,23,31,32,33

Zadaci za vežbu

Zbirka

1160-1168

1118- 1147